NÄHERUNGSWEISE LÖSUNGEN

Auch wenn wir noch nicht perfekt Differentialgleichungen lösen können, sind wir schon jetzt oft in der Lage, näherungsweise Lösungen in Form von Potenzreihen oder iterativen Ansätzen zu finden.

[H24] *Anharmonische Kraft* **[$\frac{3}{2}+1+\frac{3}{2}+1=5$ Punkte]**

Wir betrachten eine anharmonische Schwingung mit der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = 6\omega^2\frac{1}{a}x^2 - 8\omega^2\frac{1}{a^2}x^3\,, \quad x(0)=a\,, \quad \dot{x}(0)=0\,.$$

(a) Um diese Bewegungsgleichung zu lösen, machen Sie einen Potenzreihenansatz der Form

$$x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \ldots$$

und bestimmen die ersten fünf Koeffizienten c_i, $i = 0,\ldots 4$, indem Sie zunächst die Anfangsbedingungen auswerten und dann $\ddot{x}$ bilden. Die rechte Seite der Bewegungsgleichung wird dann erstaunlich einfach.

(b) Mit dem Resultat für $x(t)$ bis einschließlich der Ordnung t^4 können Sie die geschlossene Form für $x(t)$ erraten. Bestätigen Sie dies durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung.

(c) Bilden und skizzieren Sie das Potential $V(x)$, das zur Kraft in der Bewegungsgleichung gehört. (Setzen Sie $m = 1$.) Geben Sie damit die Energie E des Teilchens an.

(d) Welches Integral gibt die Laufzeit T zwischen den Umkehrpunkten an? Können Sie damit das durchaus seltsame Verhalten von $x(t)$ für $t \to \infty$ verstehen?

Hinweis: In dieser Aufgabe wurden die Anfangsbedingungen speziell so gewählt, dass die Bewegungsgleichung für eine anharmonische Kraft exakt lösbar war. Dies ist leider die Ausnahme und in der Regel nicht möglich.

[H25] *Iterative Lösung* **[$1+1+1+1+1=5$ Punkte]**

Ein Teilchen der Masse m und Ladung q rast auf der x–Achse von links mit großer Geschwindigkeit v_0 auf einen Raumbereich zu, in dem das Magnetfeld $\vec{B} \doteq (0,0,B)$ herrscht. Der Eintritt erfolgt bei $\vec{r}(0) \doteq (0,0,0)$.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. Beachten Sie, dass das Problem zweidimensional ist.

(b) Beginnen Sie mit $\vec{r}^{(0)}(t) \doteq (v_0 t, 0, 0)$ als nullter Näherung. Setzen Sie diese in die Lorentzkraft ein, und lösen damit die Bewegungsgleichung. Die Lösung ist Ihre erste Näherung $\vec{r}^{(1)}(t)$.

(c) Wiederholen Sie das Iterationsverfahren mit $\vec{r}^{(1)}$ um eine zweite Näherung $\vec{r}^{(2)}(t)$ zu erhalten. Für schwache Magnetfelder sollte dies bereits eine brauchbare Näherung darstellen.

(d) Geladene Teilchen beschreiben im homogenen Magnetfeld (angeblich) Kreisbahnen, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen werden, d.h., der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant. Welche Kreisfrequenz ω und welchen Radius R hätte diese Kreisbahn?

(e) Entwickeln Sie die exakte Lösung in Potenzen von B und vergleichen mit dem Iterationsresultat.

Hinweise: Die Kreisbahn wird durch $\vec{r}(t) \doteq (R\sin\omega t, -R+R\cos\omega t, 0)$ beschrieben. Die Lorentzkraft ist $\vec{F} = q\,(\dot{\vec{r}} \times \vec{B})$.

[C5] *Numerische Lösung* **[$1+1+3=5$ Punkte]**

Wir betrachten erneut die anharmonische Kraft aus [H24].

(a) Zeigen Sie in einem Vergleichsplot, wie sehr sich die exakte Lösung aus [H24](b) von der Näherung bis zur vierten Ordnung unterscheidet. *Hinweis*: Wenn Sie [H24](b) nicht lösen konnten, müssen Sie versuchen, die exakte Lösung mit MATHEMATICA zu bestimmen.

(b) Berechnen Sie mit MATHEMATICA die Taylorentwicklung des Potentials aus [H24] bis einschließlich zur zweiten Ordnung um das Minimum des Potentials herum. Zeigen Sie in einem Vergleichsplot, wie sehr sich das exakte Potential aus [H24] von der Taylorentwicklung unterscheidet, wie gut also für kleine Auslenkungen um das Minimum herum das Problem durch einen harmonischen Oszillator angenähert wird.

(c) Lösen Sie nun das Problem für die Anfangsbedingungen $x(0) = a/2$ und $\dot{x}(0) = 0$ numerisch. Vergleichen Sie die Lösung graphisch mit einer harmonischen Schwingung. Welche Frequenz ergibt sich?

Bitte wenden!

Die folgenden Aufgaben sind freiwillig, können aber helfen, Ihr Punktekonto für die Studienleistung aufzufüllen.

[H26*] *Harmonische Näherung* **[3* + 2* = 5* Punkte]**

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einer eindimensionalen Potentialmulde $V(x) = \kappa a^2 f(\frac{x}{a})$ mit $f(s) = -\frac{\ln(1+\cosh s)}{\cosh s}$. Bei kleiner Amplitude $|x| \ll a$ wird die Schwingung nahezu harmonisch.

(a) Entwickeln Sie f um $s = 0$ bis einschließlich zur zweiten Ordnung. Geben Sie durch Vergleich mit dem Federpotential die Kreisfrequenz ω der Schwingung an. Wieso ist hierbei wichtig, dass $\ln 2 > \frac{1}{2}$ ist, und wie sieht man das leicht ohne Taschenrechner?

(b) Alternativ kann man auch zunächst die Kraft $F = -\partial_x V$ bilden. Bis zu welcher Ordnung muss man diese dann entwickeln? Geben Sie die Bewegungsgleichung in harmonischer Näherung an und lesen Sie daraus ω ab.

[H27*] *Rutschpartie* **[5* Punkte]**

Auf einem winterlichen Parkplatz erlebt man bei Vollbremsung mit der Geschwindigkeit $\vec{v} \doteq v_0(u, w)$ die Reibungskraft

$$\vec{R} \doteq -m\alpha v_0 \Big(10 \sinh\frac{u}{2} + \frac{2w}{1+2uw}, \frac{2u}{1+2uw} + \frac{2w}{\sqrt{1+w^2}} \Big) =: -m\alpha v_0 (\partial_u V, \partial_w V)\,.$$

Welches „Potential" $V(u, w)$ liegt vor? Entwickeln Sie V bis zu quadratischen Termen in u und v und bringen Sie es in die Form $V = \text{const} + \dfrac{1}{2}(u, w) H \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$. Welche 2×2-Matrix H erginbt sich?

[H28*] *Gravitation* **[3* + 2* = 5* Punkte]**

Betrachten Sie die Konfiguration aus [H20]: drei durch masselose Drähte starr miteinander verbundene Massen $M_1 = M$, $M_2 = \frac{4}{2}M$ und $M_3 = 6M$ an den Punkten $\vec{r}_1 \doteq (1, -1, 0)a$, $\vec{r}_2 \doteq (-\frac{3}{4}, 0, 0)a$ und $\vec{r}_3 \doteq (0, \frac{1}{6}, 0)a$.

(a) Geben Sie das Gravitationspotential $V(x, y, z) = -\gamma m \sum_i \frac{M_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$ explizit an. Welche Kraft $\vec{F}(x)$ wirkt auf eine Testmasse m auf der x-Achse? Stimmen $-(\vec{\nabla}V)|_{y=z=0}$ und $-\vec{\nabla}(V|_{y=z=0})$ als Ausdrücke für $\vec{F}(x)$ überein?

(b) Welche Bedeutung hat $V(x, y{=}0, z{=}0)$? Erstellen Sie eine Skizze von $V(x, y{=}0, z{=}0)$. Sind Schwingungen möglich? Mit welcher Geschwindigkeit muss m den Ursprung durchlaufen, um nach ∞ entkommen zu können?

[H29*] *Hübsche Bahnkurve* **[5* Punkte]**

Zur Zeit $t = 0$ durchläuft ein Teilchen der Masse m den Punkt $\vec{r}(0) \doteq \frac{R}{3}(2, 2, 1)$ mit der Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(0) \doteq \frac{R\omega}{3}(2, -1, 2)$. Es ist anisotrop über die Kraft $\vec{F} = -m\omega^2 \hat{A}\vec{r}$ an den Ursprung gebunden, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Führen Sie die Hauptachsentransformation für A durch, ermitteln sie dann $\underline{r}'(0)$ und $\dot{\underline{r}}'(0)$. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für $\underline{r}'(t)$ auf und lösen Sie sie. Skizzieren Sie die Bahnkurve in der $x'y'$-Ebene, und finden Sie schließlich $\vec{r}(t)$ mit Hilfe der Rücktransformation.

Hinweis: Als Zwischenresultat seien verraten: $\underline{f}_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$, $\underline{f}_2 = \frac{1}{3}(2, -1, -2)$ und $z'(t) \equiv 0$.

[C6*] *Anharmonischer Oszillator* **[5* Punkte]**

Betrachten Sie einen anharmonischen Oszillator mit Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \frac{1}{4}m\alpha x^4$. Berechnen Sie mit MATHEMATICA die Umkehrpunkte $\underline{x}$ und $\overline{x}$ für dieses Potential. Sie erhalten im allgemeinen vier Lösungen (es hängt von der Energie ab, ob alle vier Lösungen reell sind). Diskutieren Sie, welche zwei der vier Lösungen bei gegebenen Anfangsbedingungen jeweils relevant sind.

Bestimmen Sie über den Energiesatz die Periode T mittels numerischer Integration (setzen Sie hier zum Beispiel $m = 1$, die Abhängigkeit von den anderen freien Parametern müssen Sie eigenständig sinnvoll studieren). Vergleichen Sie schließlich die Abhängigkeit der Periode T von der Energie E mit dem Fall des harmonischen Oszillators ($\alpha = 0$).

HINWEIS: Name, Vorname, und Matrikelnummer angeben! Lösungen bitte zusammenheften!